- $y'' + y = 0$ → Διαφορική εξίσωση

  $y(x) = \sin x$ ή $y(x) = \cos x$ } Λύσεις

- $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$

  → γενικότερη μορφή που περιγράφει μια Δ.Ε n-τάξης

- $F(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = 0$ (*)

  Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών.
  Η (*) ονομάζεται εξίσωση διαφορών (γενική μορφή) Ε.Δ.

Π.χ 1) $y_{n+1} - y_n = 1$ Ψάχνω να βρω μια ακολουθία $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τ.ω. να ισχύει η σχέση $y_{n+1} - y_n = 1$ ΓΙΑ ΚΑΘΕ n.

2) $y_{n+1} - n \cdot y_n^2 = 1$

3) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3n + 5$

! Η ακολουθία που ψάχνουμε μπορεί να ξεκινάει από οποιονδήποτε δείκτη θέλω. (τεχνικοί λόγοι)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τάξη της εξίσωσης διαφορών ονομάζεται η διαφορά του μεγαλύτερου από τον μικρότερο δείκτη.

Π.χ 1) $y_{n+1} - y_n = 1$, έχει τάξη 1 $(n+1-n = 1)$

2) $y_{n+1} - n y_n^2 = 1$, έχει τάξη 1

3) $y_{n+2} + 2y_{n+1} - y_n = 3n + 5$, έχει τάξη 2. $(n+2-n = 2)$

! Επειδή το n μπορεί να εμφανίζεται και μόνο του, μπορώ να γράψω τη γενική μορφή Ε.Δ ως:

$F(n, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) = 0$

~ $F(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k-1}) = y_{n+k}$ πλήθος κ
δεν έχει διαφορά από την $F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k-1}, y_{n+k}) = 0$
Η τάξη της είναι $n+k-n = k$.
$y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n-k}$ χρειάζομαι κ σχέσεις (αρχικές συνθήκες) για να βρω την ακολουθία

Παράδειγμα

$y_{n+1} - y_n = n+1 \quad , n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
Είναι 1ης τάξης, άρα για να βρω την ακολουθία χρειάζομαι 1 συνθήκη. $y_0 = 0$. (αρχική συνθήκη)
Για $y_0 = 0$, θα έχω $y_1 - y_0 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$
Ισχύει ότι $y_{n+1} = y_n + n + 1$
Άρα $y_2 = y_1 + 1 + 1 = 1+1+1 \Rightarrow y_2 = 3$. (χρονοβόρα διαδικασία)

Πράγματα που θα χρειαστούν από Αριθμητική Ανάλυση

- $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \rightarrow$ 1ης τάξης εμπρόσθια διαφορά
Το Δ: ονομάζεται εμπρόσθιος τελεστής διαφορών.
- $\nabla y_n = y_n - y_{n-1} \rightarrow$ 1ης τάξης οπίσθια διαφορά
Το ∇: ονομάζεται οπίσθιος τελεστής διαφορών
- $\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta(y_{n+1} - y_n) = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n)$
$= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$
Το 2 δεν είναι δύναμη αλλά σύνθεση 2ης τάξης εμπρόσθια διαφορά.
- $\nabla^2 y_n = \nabla(\nabla y_n) = \nabla(y_n - y_{n-1}) = (y_n - y_{n-1}) - (y_{n-1} - y_{n-2})$
$= y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}$
2ης τάξης οπίσθια (προς τα πίσω) διαφορά.
- $\delta y_n = y_{n+1/2} - y_{n-1/2}$ 1ης τάξης κεντρική διαφορά.
Το δ: ονομάζεται κεντρικός τελεστής διαφορών
- $\delta^2 y_n = \delta(\delta y_n) = \delta(y_{n+1/2} - y_{n-1/2}) =$
$= y_{n+1} - y_n - y_n + y_{n-1} = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$.
2ης τάξης κεντρική διαφορά.
- $I y_n = y_n$, I: ταυτοτικός τελεστής
και ισχύει ότι $I y_n = \Delta^0 y_n$

- Γραμμικός τελεστής (συμπεριφέρεται καλά ως προς την πρόσθεση και το βαθμωτό γινόμενο)
$\Delta(ax_n+by_n)=a\Delta x_n+b\Delta y_n$ το Δ είναι γραμμικός τελεστής
Επίσης τα: ∇, δ, I είναι γραμμικοί τελεστές.
- $E y_n = y_{n+1}$ ~> $1^{ης}$ τάξης
E: εμπρόσθια μετατόπιση
- $E^2 y_n = y_{n+2}$, $E^3 y_n = y_{n+3}$ ..., $E^p y_n = y_{n+p}$
2ης τάξης, 3ης τάξης, p-τάξης
Και ορίζουμε $E^0 y_n = y_n = I y_n$, δηλ. $E^0 = I$

Παραδείγματα

1) $\Delta y_n = y_{n+1}-y_n = E y_n - I y_n = (E-I)y_n$
και $\Delta = E - I \Rightarrow E = \Delta + I$ ~> τα E, Δ, I είναι τελεστές
δηλαδή συναρτήσεις

2) $\Delta(x_n y_n) = x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n$
Θέλω ν.δ.ο $\Delta(x_n y_n) = E x_n \Delta y_n + I y_n \Delta x_n$
Έχω $\Delta(x_n y_n) = x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n =$ ← προσθαφαιρώ το $x_{n+1}y_n$
$= x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n + x_{n+1}y_n - x_{n+1}y_n =$
$= x_{n+1}(y_{n+1}-y_n) + y_n(x_{n+1}-x_n) =$
$= E x_n \cdot \Delta y_n + I y_n \Delta x_n$

3) $$\Delta\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} =$$
$$= \frac{x_{n+1}y_n - x_n y_{n+1} + x_n y_n - x_n y_n}{y_n y_{n+1}} = \frac{y_n(x_{n+1}-x_n) - x_n(y_{n+1}-y_n)}{y_n \cdot y_{n+1}}$$
$$= \frac{I y_n \Delta x_n - I x_n \Delta y_n}{I y_n \cdot E y_n}$$

4) $$\Delta\left(\sum_{i=n_0}^{n-1} y_i\right) = \underbrace{\sum_{i=n_0}^{(n+1)-1} y_i - \sum_{i=n_0}^{n-1} y_i}_{\text{άλλαξε μόνο ό,τι έχει } n.} = \sum_{i=n_0}^{n} y_i - \sum_{i=n_0}^{n} y_i = y_n.$$

! Κάποιες φορές αντί για y_i θα έχω $y(i)$

5) $$\sum_{i=w}^{n-1} \Delta(x_i) = \underbrace{\sum_{i=w}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)}_{\text{τηλεσκοπικό άθροισμα}} = x_n - x_w$$

~ Έστω $\Delta z_n = y_n$ δηλ. $z_{n+1} - z_n = y_n$

Ορίζω ως Δ^{-1} τελεστή τ.ω $\Delta \cdot \Delta^{-1} = I$

(αντίστροφος του Δ από δεξιά) ↳ ισχύει με αυτή τη σειρά.

και ισχύει $\Delta^{-1} y_n = z_n$

$$\left.\begin{aligned} y_n &= \Delta z_n = z_{n+1} - z_n \\ y_{n-1} &= z_n - z_{n-1} \\ y_{n-2} &= z_{n-1} - z_{n-2} \\ &\vdots \\ y_0 &= z_1 - z_0 \end{aligned}\right\} \overset{\oplus}{\Longrightarrow} z_{n+1} - z_0 = y_0 + y_1 + \dots + y_n$$

Δηλαδή,

$$z_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right) + z_0$$

$$z_{n+1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i\right) + y_n + z_0 = \left(\sum_{i=0}^{n-1} y_i\right) + \underbrace{z_{n+1} - z_n}_{=y_n} + z_0$$

$$\Rightarrow z_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i + z_0$$

! $\Delta z_n = y_n$ ⟶ εξίσωση διαφορών και η γενική της λύση είναι η $z_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i + z_0$

<u>Παράδειγμα</u>

$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$n+2-n = 2$ άρα $2^{ης}$ τάξης (χρειάζομαι 2 αρχικές συνθήκες)

$y_0 = 1$, $y_1 = 1$ (αρχικές συνθήκες)

! • Αν δεν υπάρχουν δυνάμεις στα y θα μιλάμε για γραμμική εξίσωση διαφορών.

• Αν οι συντελεστές είναι σταθεροί αριθμοί τότε μιλάμε για γραμμική Ε.Δ. με σταθερούς συντελεστές

• $a_r(n) y_{n+r} + a_{r-1}(n) y_{n+r-1} + \dots + a_1(n) y_{n+1} + a_0(n) y_n = f(n)$

Αν $f(n) = 0$ τότε η Ε.Δ θα ονομάζεται ομογενής

Αν $f(n) \neq 0$ τότε η Ε.Δ θα είναι μη-ομογενής

Αν $a_r, a_{r-1}, \dots, a_1, a_0$ είναι σταθερές τότε η Ε.Δ είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές

<u>πχ</u> $y_{n+1} - n y_n^2 = 1$, μη γραμμική, μη ομογενής, χωρίς σταθερούς συντελεστές Ε.Δ $1^{ης}$ τάξης

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ύπαρξη μοναδικής λύσης Ε.Δ): Έστω η Ε.Δ.
$y_{n+k} = F(n, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1})$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (*)
Εαν δοθούν k διαδοχικές αρχικές τιμές $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$
τότε η (*) έχει μοναδική λύση που ικανοποιεί αυτές τις αρχικές συνθήκες

↳ μοναδική ακολουθία που ικανοποιεί ΚΑΙ την (*) και τις $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$

Παράδειγμα

1) $n y_{n+1} - y_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
$1^{ης}$ τάξης. Έστω $y_0 = a$ η αρχική συνθήκη που χρειάζομαι

2) $y_{n+2} = n y_{n+1} + y_n$ $2^{ης}$ τάξης
$y_0 = 0$, $y_1 = 1$. ΔΕΝ μπορώ να βάλω τις y_0, y_2
επειδή πρέπει να είναι διαδοχικές.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ Ε.Δ $1^{ης}$ ΤΑΞΗΣ

03/03/2016

$y_{n+1} = p(n) \cdot y_n + q(n)$ (*) Η πιο απλή μορφή Ε.Δ

$p(n), q(n)$: γνωστές ακολουθίες

y_n: ζητούμενη / άγνωστη ακολουθία.

Υποθέτω $\prod_{j=1}^{n} p(j) \neq 0 \Rightarrow p(j) \neq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$

$$\frac{y_{n+1}}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} = \frac{p(n) y_n + q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \Rightarrow$$

Διαιρώ και τα δυο μέλη της (*) με το $\prod_{j=1}^{n} p(j)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{y_{n+1}}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} - \frac{y_n}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)}}_{\text{Διαφορά δυο όρων ακολουθίας}} = \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{y_n}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)}\right) = \frac{q(n)}{\prod_{j=1}^{n} p(j)}$$

Η σχέση αυτή ισχύει για όλα τα n που ισχύει η (*)

Έτσι θα έχω:

(**)

$$n=2: \quad \Delta\left(\frac{y_2}{\prod_{j=1}^{2-1} p(j)}\right) = \frac{q(2)}{\prod_{j=1}^{2} p(j)}$$

$$n=3: \quad \Delta\left(\frac{y_3}{\prod_{j=1}^{3-1} p(j)}\right) = \frac{q(3)}{\prod_{j=1}^{3} p(j)}$$

$\vdots$

$$n-1: \quad \Delta\left(\frac{y_{n-1}}{\prod_{j=1}^{n-1-1} p(j)}\right) = \frac{q(n-1)}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)}$$

(**) $n=1$: $\dfrac{y_2 - y_1}{\prod_{j=1}^{0} p(j)} = \dfrac{q(1)}{\prod_{j=1}^{1} p(j)}$, $\quad p(0) = 1 \leftarrow \prod_{j=1}^{0} p(j)$, $\quad \prod_{j=1}^{1} p(j) = p(1)$

$\xRightarrow{\oplus}$ Προσθέτω κατά μέλη και τελικά:

$$\xRightarrow{\oplus} \frac{y_n}{\prod_{j=1}^{n-1} p(j)} = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} p(j)} \cdot q(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1} p(j)\right) \cdot y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j)\right) q(k)}$$

→ Λύση της Ε.Δ. (*)

↳ Εξαρτάται μόνο από τα γνωστά p, q και ο τύπος ισχύει εάν το n ξεκινάει από n = 1.

Εάν $n \geq n_0$

$$\boxed{y_n = \left(\prod_{j=n_0}^{n-1} p(j)\right) y(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j)\right) q(k)}$$

→ Ο τύπος αυτός ισχύει για $n \geq n_0$.

↳ για $n_0 = 1$ έχω τον προηγούμενο τύπο.

Παράδειγμα

$$y_{n+1} = \underset{= p(n)}{\frac{n}{n+1}} \cdot y_n + \underset{= q(n)}{n} \quad , n \geq 1^{= n_0} \qquad n_0 \text{ είναι το } 1$$

Να βρεθεί η λύση y_n.

! Ισχύει: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ και $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Λύση// • $\prod_{j=n_0}^{n-1} p(j) = \prod_{j=1}^{n-1} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{(n-1)+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n-1} p(j) = \frac{1}{n}$$

Υπολογίζω πρώτα τα γινόμενα για ευκολία.

• $\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j) = \prod_{j=k+1}^{n-1} \frac{j}{j+1} = \frac{k+1}{\cancel{k+2}} \cdot \frac{\cancel{k+2}}{\cancel{k+3}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n} = \frac{k+1}{n}$

Τότε: $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p(j) \right) \cdot q(k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} \cdot k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) \cdot k$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \right] = \frac{1}{3}(n^2 - 1)$$

Και άρα $y_n = \frac{1}{n} y_1 + \frac{1}{3}(n^2 - 1) \quad , n \geq 1$

Αφού δεν έχω αρχική συνθήκη το y_1 θα παραμένει ως y_1.

! Εάν είχα $\sum_{k=5}^{n-1} k$ είτε θα κάνω αλλαγή, είτε θα πάρω $\sum_{k=5}^{n-1} k = \sum_{k=1}^{n-1} k - (1+2+3+4)$

Για επαλήθευση της λύσης, βάζω στην αρχική Ε.Δ τη λύση που βρήκα: $y_{n+1} = \frac{n}{n+1} y_n + n \quad , n \geq 1$

Και θα πάρω

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} y_1 + \frac{1}{3}\left((n+1)^2 - 1\right)}_{y_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} y_1 + \frac{1}{3}(n^2 - 1)}_{y_n} \Bigg) + n$$

σε

Ύστερα από πράξεις, καταλήγω σε ταυτότητα $(0=0)$

Παράδειγμα

$y_{n+1} = a y_n + b \quad , n = \overset{=n_0}{0}, 1, 2 \quad (*)$

↳ γραμμική ΕΔ α' τάξης. Να βρεθεί η λύση της.

$p(n) = a \quad , q(n) = b \quad$ ($p(n), q(n)$ σταθερές ακολουθίες)

Τότε $y_n = \begin{cases} a^n y_0 + b \dfrac{1-a^n}{1-a} , & a \neq 1 \\ y_0 + nb , & a = 1 \end{cases}$

→ Σπίτι: Να βρω αναλυτικά τη λύση y_n της (*)

• Αν $y_0 = \frac{b}{1-a}$ $(a \neq 1)$ τότε $y_n = a^n \cdot \frac{b}{1-a} + b \frac{1-a^n}{1-a}$

$\Rightarrow y_n = \frac{\cancel{a^n b} + b - \cancel{b a^n}}{1-a} = \frac{b}{1-a} \quad \forall n \geq 0.$

Δηλ. αν $y_0 = \frac{b}{1-a}$ τότε $y_n = \frac{b}{1-a} = y_0$ σταθερή.

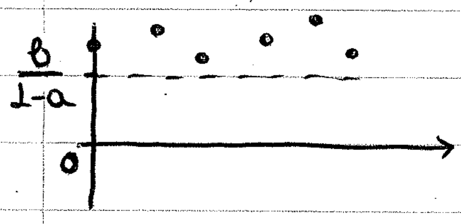
• Για $a > 1$ (για να γνωρίζω το πρόσημο του $\frac{1-a^n}{1-a}$)

Α) και έστω $y_0 > \frac{b}{1-a}$, $1-a<0$

Τότε, $y_n = a^n y_0 + b \frac{1-a^n}{1-a} > a^n \frac{b}{1-a} + b \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{b}{1-a}$

Δηλαδή

$y_n > \frac{b}{1-a}$ (Δηλ. αν ο πρώτος όρος είναι πάνω από το $b/1-a$, τότε όλοι οι όροι της y_n θα είναι πάνω από το $b/1-a$)



Δηλ. το $\frac{b}{1-a}$ είναι ένα κάτω φράγμα της y_n.

Θέλω να βρω το όριο της y_n:

$y_n = a^n y_0 + b \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{\overset{+\infty}{a^n} (\overset{<0}{y_0 - a y_0 - b}) + b}{1-a<0} \to +\infty$

Είναι $a > 1 \Rightarrow \lim a^n = +\infty$

$y_0 > \frac{b}{1-a} \Rightarrow (1-a) y_0 < b \Rightarrow y_0 - a y_0 - b < 0.$

Β) έστω $y_0 < \frac{b}{1-a}$ → Αναλυτικά στο σπίτι!!

καταλήγω σε ανάλογα αποτελέσματα

$y_n \to -\infty$

! Οι ασκήσεις να παραδίδονται ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ την Πέμπτη !!!

• Για $a<1$

$$y_n = a^n y_0 + b\,\frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n(y_0 - a y_0 - b) + b}{1-a}$$

$\lim a^n = 0$

i) $0<a<1$
ii) $-1<a<0$ } $\lim a^n = 0$
iii) $a<-1$

Άρα παίρνω τις περιπτώσεις
i) $-1<a<1 \quad a\neq 0$
ii) $a<-1$

για $a=0 \Rightarrow \lim a^n = 0$

Παράδειγμα

K_0: αρχικό κεφάλαιο

ϵ : επιτόκιο

Να δειχθεί ότι μετά από n έτη, το κεφάλαιο θα είναι

$K_n = K_0(1+\epsilon)^n$

Λύση// Έστω K_n - κεφάλαιο του n-οστού έτους

$K_{n+1} = K_n + \epsilon K_n \rightsquigarrow$ κεφάλαιο κατά το $n+1$ έτος

Άρα $K_{n+1} = \underbrace{(1+\epsilon)}_{=p(n)} K_n$. Γραμμική Ε.Δ $1^{ης}$ τάξης.

Το $q(n)=0$, $n_0=0$.

Παράδειγμα

Έχουμε μια οικογένεια εντόμων η οποία εξαφανίζεται πριν η επόμενη γενιά εκκολαφθεί. Επίσης υποθέτουμε ότι η αύξηση από τη μια γενιά στην επόμενη είναι ανάλογη του προηγούμενου πληθυσμού. Να βρεθεί ο πληθυσμός στο ν-οστό έτος

Λύση// N_n = πληθυσμός n-έτους

N_{n+1} = πληθυσμός στο $(n+1)$-έτος.

Η αύξηση του πληθυσμού είναι: $N_{n+1} - N_n$ και πρέπει να είναι ανάλογη του προηγούμενου πληθυσμού.

Άρα $N_{n+1} - N_n = a \cdot N_n$, a: σταθερός συντελεστής (συνήθως μεταξύ 0 ως 1)

Τότε $N_{n+1} = (1+a)\cdot N_n$. Γραμμική Ε.Δ α' τάξης.

με $p(n) = 1+a$, $q(n)=0$, $n_0 = 0$

και η λύση θα είναι $N_n = (1+a)^n N_0$

Σπίτι Αναλυτικά οι πράξεις!!

Παρασκευή 18.03.2016

Ασκήσεις (για Πέμπτη 24/3)

Να βρεθούν και να επαληθευτούν οι γενικές λύσεις για τα ακόλουθα

1) $y_{n+1} = n\, y_n \,,\ n \in \mathbb{N}$
$y_1 = 1$

2) $y_{n+1} - 3y_n = n^2 \,,\ n \geq 0.$

Ορισμός: Έστωσαν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Οι ακολουθίες αυτές θα λέγονται γραμμικά εξαρτημένες αν $\exists\, c_1, c_2$ σταθερές τέτοιες ώστε

$$c_1 x_n + c_2 y_n = 0 \,,\quad \forall n \geq 1 \quad (c_1, c_2) \neq (0,0)$$

Αν $c_1 = c_2 = 0$ τότε είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα
Να εξετάσετε αν είναι γραμμικά εξαρτημένες οι

α) $x_n = 3n + \frac{12}{5} \,,\quad y_n = 5n + 4 \,,\quad n \in \mathbb{N}$

$5 \cdot x_n - 3 y_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ άρα είναι γραμμικά εξαρτημένες
$c_1 = 5 \,,\ c_2 = -3 \quad (c_1, c_2) \neq (0,0).$

β) $x_n = 2^n \,,\quad y_n = 3^n \,,\ n \in \mathbb{N}$

Οι x_n, y_n είναι μάλλον γραμμικά ανεξάρτητες. Πρέπει να το αποδείξω.

$c_1 2^n + c_2 3^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ Ισχύει $\forall n$ άρα και για $n=1$, $n=2$.

Για $n=1$: $c_1 2 + c_2 3 = 0$

Για $n=2$: $c_1 2^2 + c_2 3^2 = 0$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Ορισμός: Έστωσαν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες. Η ορίζουσα Casorati ορίζεται ως

$$C_n = C(x_n, y_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix}$$

(είναι αντίστοιχη της ορίζουσας Wronski).
Για κάθε n θα έχω και μία ορίζουσα. Οπότε μπορώ να θεωρήσω ότι είναι μία ακολουθία, η C_n.

Παράδειγμα
Να υπολογιστεί η ορίζουσα Casorati.

1) $x_n = 3n + \frac{12}{5}$, $y_n = 5n+4$, $n \in \mathbb{N}$

$$C_n = \begin{vmatrix} 3n+\frac{12}{5} & 5n+4 \\ 3(n+1)+\frac{12}{5} & 5(n+1)+4 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall n \geq n_0.$$

2) $x_n = 2^n$, $y_n = 3^n$

$$C_n = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{vmatrix} = 6^n \neq 0$$

Για 3 ακολουθίες x_n, y_n, z_n η ορίζουσα Casorati γίνεται

$$C_n = C(x_n, y_n, z_n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n & z_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \end{vmatrix}$$

Θεώρημα: Έστω η εξίσωση διαφορών
$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0$, $\forall n \geq n_0$ με $q_n \neq 0, \forall n \geq n_0$
και $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ λύσεις της εξίσωσης. Τότε ισχύει
$C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) = 0 \quad \forall n \geq n_0$ ή
$C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$
(ή θα είναι παντού 0 ή παντού $\neq 0$)

Απόδειξη

$$C_{n+1} = \begin{vmatrix} y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} \\ y_{n+2}^{(1)} & y_{n+2}^{(2)} \end{vmatrix} = y_{n+1}^{(1)}\left(-p_n y_{n+1}^{(2)} - q_n y_n^{(2)}\right) - y_{n+1}^{(2)}\left(-p_n y_{n+1}^{(1)} - q_n y_n^{(1)}\right)$$

$$= q_n\left(y_n^{(1)} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} y_{n+1}^{(1)}\right) = q_n C_n$$

$$C_{n+1} = q_n C_n, \quad \forall n \geq n_0$$

$C_{n_0+1} = q_{n_0} C_{n_0}$

$C_{n_0+2} = q_{n_0+1} \cancel{C_{n_0+1}}$

$\vdots$

$C_{n+1} = q_n \cancel{C_n}$

Πολλαπλασιάζω κατά μέλη και απλοποιούνται

$$C_{n+1} = \underbrace{\prod_{k=n_0}^{n} (q_k)}\, C_{n_0}$$

$q_n \neq 0$
άρα και $\prod \neq 0$

Η τιμή εξαρτάται μόνο από το C_{n_0}, αφού $q_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$. Οπότε ή $C_{n+1} = 0$ ή $C_{n+1} \neq 0$.

Θεώρημα: Έχουμε την εξίσωση διαφορών

Χωρίς Απόδειξη

$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \quad \forall n \geq n_0$, με $q_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ και $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ λύσεις.

Τότε οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν-ν $C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \neq 0$, $\forall n \geq n_0$.

Αν $C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) = 0$ τότε $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ γραμμικά εξαρτημένες.

Θεώρημα: Έχουμε την εξίσωση διαφορών

$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \quad \forall n \geq n_0$, με $q_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$ και $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ λύσεις γραμμικά ανεξάρτητες. Τότε η γενική λύση είναι η

$y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} \quad \forall n \geq n_0$ και c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Θεώρημα: Έστω η μη ομογενής εξίσωση διαφορών

$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = F_n$, $n \geq n_0$. με $q_n \neq 0 \ \forall n \geq n_0$

Θεωρώ $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, $y_n^{(\mu)}$ είναι μία μερική λύση της μη-ομογενούς. Τότε η γενική λύση της μη-ομογενούς είναι η

$$y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + y_n^{(\mu)}.$$

Παράδειγμα

$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 1 - 2n$, $n \geq 0$.

$y_n^{(1)} = (-1)^n \quad n \geq 0$

$y_n^{(2)} = 2^n \quad n \geq 0$

$y_n^{(\mu)} = n \quad , n \geq 0$

α) Διαπιστώστε ότι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς.

β) Ελέγξτε αν οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

γ) Ν.δ.ο η $y_n^{(\mu)}$ είναι μερική λύση της μη ομογενούς

δ) Βρείτε τη γενική λύση.

α) Αντικαθιστώ τις $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση και καταλήγω σε ταυτότητα.

β) Αρκεί να δείξω ότι $C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}) \neq 0$ για κάποιο n, όποιο με βολεύει καλύτερα.

γ) Αντικαθιστώ την $y_n^{(\mu)}$ στο αριστερό μέρος της μη-ομογενούς εξίσωσης και πρέπει να δείξω ότι ισούται μετά από πράξεις με το δεξί $(1-2n)$

δ) $y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + y_n^{(\mu)}$, c_1, c_2 αυθαίρετες σταθερές

Είχαμε αποδείξει πριν τον γενικό τύπο

$$C_{n+1} = \left(\prod_{i=n_0}^{n} q_i\right) C_{n_0}$$ που είναι για εξισώσεις $2^{ης}$ τάξης.

Αν έχουμε εξίσωση διαφορών k τάξης ο τύπος γίνεται

$$C_n = (-1)^{k(n-n_0)} C_{n_0} \prod_{i=n_0}^{n-1} q_i$$

Αυτός ο τύπος ονομάζεται τύπος του Abel.

Εφαρμογή: Έστω $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Να βρεθεί εξίσωση διαφορών που να έχει το σύνολο $\{y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}\}$ ως Β.Σ.Λ (Βασικό Σύνολο Λύσεων)

Η εξίσωση θα είναι k τάξης, γραμμική και ομογενής με ΒΣΛ το $\{y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots, y_n^{(k)}\}$.

y_n λύση (άγνωστη συνάρτηση)

$$\begin{vmatrix} y_n & y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \cdots & y_n^{(k)} \\ y_{n+1} & y_{n+1}^{(1)} & y_{n+1}^{(2)} & \cdots & y_{n+1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{n+k} & y_{n+k}^{(1)} & y_{n+k}^{(2)} & \cdots & y_{n+k}^{(k)} \end{vmatrix} = 0$$

Η εξίσωση βγαίνει από την ορίζουσα.

Παράδειγμα
Να βρεθεί η Ε.Δ που έχει ως γενική λύση την $y_n = c_1 + c_2(-1)^n + c_3 n$, $n \geq 1$

$y_n^{(1)} = 1$, $y_n^{(2)} = (-1)^n$, $y_n^{(3)} = n$
μάλλον θα είναι έτσι. Πρέπει να δείξω ότι οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, y_n^{(3)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες

$$C(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, y_n^{(3)}) = \begin{vmatrix} 1 & (-1)^n & n \\ 1 & (-1)^{n+1} & n+1 \\ 1 & (-1)^{n+2} & n+2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Άρα είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
Το σύνολο $\{y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, y_n^{(3)}\}$ είναι σύνολο λύσεων διότι για οποιεσδήποτε c_1, c_2, c_3 $y_n = 1$ ή $y_n = (-1)^n$ ή $y_n = n$ θα είναι λύσεις.

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 0 \\ c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0 \\ c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_n = 1 \\ y_n = (-1)^n \\ y_n = n \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} y_n & 1 & (-1)^n & n \\ y_{n+1} & 1 & (-1)^{n+1} & n+1 \\ y_{n+2} & 1 & (-1)^{n+2} & n+2 \\ y_{n+3} & 1 & (-1)^{n+3} & n+3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ από την ορίζουσα 4x4 βρίσκω την εξίσωση.

Παρατήρηση: Το Β.Σ.Λ λέγεται και θεμελιώδες σύστημα λύσεων ή θεμελιώδες σύνολο λύσεων

Παρατήρηση: Για $q_n \neq 0$, $\forall n \geq n_0$ μπορώ να βρω ένα Β.Σ.Λ

Ασκήσεις

1) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

α) $F_1(n)=1$, $F_2(n)=n$, $F_3(n)=n^2$, $F_4(n)=n^3$, $F_5(n)=n^4$

β) $F_1(n)=a^n$, $F_2(n)=na^n$, $F_3(n)=n^2a^n$, $a>0$.

2) Να βρεθεί η Ε.Δ που έχει ως γενική λύση την

$y_n = c_1 n + c_2 e^{-n}\cos(n) + c_3 e^{-n}\sin(n)$, $n \geq 1$

Πέμπτη 24 Μαρτίου 2016

Έστω η Ε.Δ. $y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0$ με

a_1, a_2: σταθερές και $a_2 \neq 0$.

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής $\rightarrow y_n = \lambda^n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$

$\lambda^{n+2} + a_1 \lambda^{n+1} + a_2 \lambda^n = 0 \Longrightarrow$

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ (χαρακτηριστική εξίσωση)

ΑΝ (i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$y_n^{(1)} = \lambda_1^n$

$y_n^{(2)} = \lambda_2^n$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \Rightarrow y_n^{(1)}, y_n^{(2)} : \text{Γ.Α.}$$

$y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ (γενική λύση)

ΑΝ (ii) $\lambda_1 = \lambda_2$

$y_n^{(1)} = \lambda_1^n$

$y_n^{(2)} = n \lambda_2^n = n \lambda_1^n$

$(n+2)\lambda_1^{n+2} + a_1 (n+1) \lambda_1^{n+1} + a_2 n \lambda_1^n =$

$= n\lambda_1^n(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + \lambda_1^n(\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2) + \lambda_1^n(\lambda_1^2 - a_2) =$

$= n\lambda_1^n \cdot 0 + \lambda_1^n \cdot 0 + \lambda_1^n \cdot 0 = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^n \\ \lambda_1^{n+1} & (n+1)\lambda_1^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n (n+1) \lambda_1^{n+1} - \lambda_1^{n+1} n \lambda_1^n \neq 0$$

$\Downarrow$

$y_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n$ (γενική λύση) $\quad y_n^{(1)}, y_n^{(2)} : \text{Γ.Α}$

Ειδική περίπτωση της (i): $\lambda_1 = a+ib \neq \lambda_2 = a-ib$

$\lambda_1 = a+ib = re^{i\theta}$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\cos\theta = \frac{a}{r}, \sin\theta = \frac{b}{r}, \theta \in (-\pi, \pi]$

$\lambda_2 = a-ib = re^{-i\theta}$

$e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$

$y^n = c_1(a+ib)^n + c_2(a-ib)^n =$

$= c_1 r^n e^{in\theta} + c_2 r^n e^{-in\theta} =$

$= r^n[c_1(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)) + c_2(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))] =$

$= r^n[(c_1+c_2)\cos(n\theta) + i(c_1-c_2)\sin(n\theta)] =$

$= r^n(C_1\cos(n\theta) + C_2\sin(n\theta))$ $C_1 = c_1+c_2$

$C_2 = i(c_1-c_2)$

<u>Παράδειγμα</u>

$y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 0$

$a_1 = -1$

$a_2 = -12$

$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ (χαρακτηριστική εξίσωση)

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 4$

$y_n = c_1(-3)^n + c_2 4^n$

Παράδειγμα

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$$

$$y_n^{(1)} = 3^n$$
$$y_n^{(2)} = n3^n$$

Παράδειγμα

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + 2y_n = 0$$

$$\lambda_1 = -1 + i$$
$$\lambda_2 = -1 - i$$

$$r = \sqrt{2}$$
$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$y_n = (\sqrt{2})^n \left(C_1 \cos\frac{3\pi n}{4} + C_2 \sin\frac{3\pi n}{4} \right)$$

Ασκήσεις (ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΕΜΠΤΗ 31 ΜΑΡ)

1. Να βρεθούν οι γενικές λύσεις για τα εξής:

(i) $y_{n+5} - 3y_{n+4} + 4y_{n+3} - 4y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n = 0$

(ii) $y_{n+2} - 9y_{n+1} + 20y_n = 0$

(iii) $y_{n+3} - 5y_{n+2} + 8y_{n+1} - 4y_n = 0$

(iv) $y_{n+3} - 3y_{n+2} + 4y_{n+1} - 2y_n = 0$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ για (i): $(\lambda-1)^3(\lambda+1)^2 = 0$

Έστω η Ε.Δ. $y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = F_n$

Υπάρχουν οι εξής **δύο** μέθοδοι:

(i) Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

(ii) Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων

Μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών

Έστω a_1, a_2: σταθερές.

Στην F_n πρέπει να εμφανίζονται μόνο αθροίσματα και γινόμενα από τα εξής:

(i) n^k, $k \geq 0$

(ii) b^n, $b \neq 0$, b: σταθερά

(iii) $\cos(\gamma n)$, $\sin(\gamma n)$, $\gamma \neq 0$, γ: σταθερά

Θεώρημα: Έστω $F_n = \sum_i P_i(n) b_i^n (A_i \cos(\gamma_i^n) + B_i \sin(\gamma_i^n))$.

Τότε: $y_n = \sum_i n^{p_i} b_i^n (A_i(n)\cos(\gamma_i^n) + B_i(n)\sin(\gamma_i^n))$,

όπου $p_i = 0$ αν $b_i(\cos\gamma_i + i\sin\gamma_i)$: όχι ρίζα της $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ και $p_i = 1$ αν $b_i(\cos\gamma_i + i\sin\gamma_i)$: ρίζα της $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

Παράδειγμα.

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = n^2 - 1 \quad ⊛$$

$a_1 = -5$

$a_2 = 6$

$F_n = n^2 - 1$

Άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda_2 = 3$

$b_1 = 1$

$A_1 = 1$

$\gamma_1 = 0$

B_1: τυχόν

$P_1(n) = n^2 - 1 = F_n$

$B_1(\cos\gamma_1 + i\sin\gamma_1) = 1 \overset{\neq 2}{\underset{\neq 3}{\Longrightarrow}} \rho_1 = 0$

$y_n = \Gamma_0 n^2 + \Gamma_1 n + \Gamma_2 = A_1(n)$

$\circledast \Longrightarrow \Gamma_0(n+2)^2 + \Gamma_1(n+2) + \Gamma_2 -$
$-5\Gamma_0(n+1)^2 - 5\Gamma_1(n+1) - 5\Gamma_2 +$
$+6\Gamma_0 n^2 + 6\Gamma_1 n + 6\Gamma_2 = n^2 - 1 \Longrightarrow$

$\Gamma_0 = \frac{1}{2}, \Gamma_1 = \frac{3}{2}, \Gamma_2 = 2$

Άρα: $y_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2$

31/03/2016

Παράδειγμα

Να επιλυθεί η Ε.Δ. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 4\cdot 2^n$ ⊛

Λύση// Η ⊛ είναι μια γραμμική, μη-ομογενής Ε.Δ. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές

Τότε θα έχω $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightsquigarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

↳ χ.π. της ομογενούς

και $F_n = 4\cdot 2^n$.

(Το $F_n = 4\cdot 2^n$ είναι καλής μορφής, άρα μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα)

Υπολογίζω την παράσταση που μου δίνεται. Εάν είναι ρίζα του πολ/μου τότε $\rho_i = 1$, αλλιώς εάν δεν είναι παίρνω $\rho_i = 0$.

B_1 τυχόν

$P_1(n) = 4$, $b_1 = 2$, $A_1 = 1$, $\gamma_1 = 0$

μερική λύση της μη ομογενούς $y_n^{(\mu)}$ ← Οπότε η λύση είναι $y_n = A\cdot n\cdot 2^n$.

$A(n+2)2^{n+2} - 3A(n+1)2^{n+1} + 2An2^n = 4\cdot 2^n \Rightarrow$

$\Rightarrow A(n+2)\cdot 2^2 - 3A(n+1)\cdot 2 + 2An = 4$ ⇝ πρέπει να βρω ένα Α έτσι ώστε η σχέση αυτή να ισχύει για όλα τα n.

$\Rightarrow (4A - 6A + 2A)n + (8A - 6A) = 0n + 4$

Άρα $0n + 2A = 0n + 4$

Δηλ. $2A = 4 \Rightarrow A = 2$

→ ΔΕΝ μπορώ να βάλω ένα συγκεκριμένο n και να βρω το Α, γιατί δεν είμαι σίγουρος εάν αυτό το Α θα ισχύει για όλα τα n.

Σπίτι

ΑΣΚΗΣΗ

1) Να επιλυθεί η Ε.Δ. $4y_{n+2} - y_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

2) -//- $y_{n+2} - 7y_{n+1} + 10y_n = 8\cdot 3^n$.

με $y_0 = -1$, $y_1 = -6$.

Υποδ. $y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + y_n^{(\mu)}$ Με τις $y_0 = -1$, $y_1 = -6$ υπολογίζω τα c_1, c_2.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων) → Δίνει μια μερική λύση της μη-ομογενούς

Έστω η Ε.Δ. $2^{ης}$ τάξης $y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = F_n$ ① με p_n, q_n, F_n δοσμένες ακολουθίες με $q_n \neq 0$ $\forall n$. Επίσης έστω $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Τότε $y_n^{(\mu)} = U_n^{(1)} y_n^{(1)} + U_n^{(2)} y_n^{(2)}$ όπου

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(1)} \Delta U_n^{(1)} + y_{n+1}^{(2)} \Delta U_n^{(2)} = 0 & ② \\ y_{n+2}^{(1)} \Delta U_n^{(1)} + y_{n+2}^{(2)} \Delta U_n^{(2)} = 0 & ③ \end{cases}$$

άγνωστα

Τα $U_n^{(1)}, U_n^{(2)}$ ακολουθίες ικανοποιούν αυτό το σύστημα.

Αποδ//

$$y_{n+1}^{(\mu)} = U_{n+1}^{(1)} y_{n+1}^{(1)} + U_{n+1}^{(2)} y_{n+1}^{(2)}$$

$$y_{n+2}^{(\mu)} = U_{n+2}^{(1)} y_{n+2}^{(1)} + U_{n+2}^{(2)} y_{n+2}^{(2)}$$

Αντικαθιστώ στην ① και έχω τελικά

$y_{n+2}^{(\mu)} + p_n y_{n+1}^{(\mu)} + q_n y_n^{(\mu)} = \ldots = F_n$ (Στα ενδιάμεσα βήματα αξιοποιώ το ότι τα $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι λύσεις)

$$② \Longrightarrow \Delta U_n^{(1)} = -\frac{F_n \cdot y_{n+1}^{(2)}}{C_{n+1}} \quad ④$$

C_{n+1} → ορίζουσα Casorati $\neq 0$ καθώς οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$③ \Longrightarrow \Delta U_n^{(2)} = \frac{F_n \, y_{n+1}^{(1)}}{C_{n+1}} \quad ⑤$$

→ Επιλύοντας το σύστημα παίρνω τις τιμές των $\Delta U_n^{(1)}, \Delta U_n^{(2)}$

Από την ④ παίρνω σχέσεις για $n=1, n=2, \ldots$ και με πρόσθεση κατά μέλη καταλήγω:

$$U_n^{(1)} = U_0^{(1)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k \, y_{k+1}^{(2)}}{C_{k+1}}$$

και με όμοιο τρόπο από την ⑤.

$$U_n^{(2)} = U_0^{(2)} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k \, y_{k+1}^{(1)}}{C_{k+1}}$$

Τότε

$$\boxed{y_n^{(\mu)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \\ y_n^{(1)} & y_n^{(2)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{k+1}^{(1)} & y_{k+1}^{(2)} \\ y_{k+2}^{(1)} & y_{k+2}^{(2)} \end{vmatrix}}}$$

Το ξέρω απ' έξω και το χρησιμοποιώ απευθείας.

Για να ισχύει ΠΡΕΠΕΙ οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ να είναι λύσεις

Παράδειγμα

$$y_{n+2} - \frac{4(n+1)}{2n+1} y_{n+1} + \frac{2n+3}{2n+1} y_n = \overset{\text{"} F_n}{2n+3}, \quad n=0,1,2\ldots$$

$y_n^{(1)} = 1$, $y_n^{(2)} = n^2$ γραμ. ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Να βρεθεί μια μερική λύση της μη-ομογενούς.

Λύση// $F_n = 2n+3$. Τότε $F_k = 2k+3$

$y_{k+1}^{(1)} = 1$, $y_{k+1}^{(2)} = (k+1)^2$.

Τότε

$$y_n^{(p)} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+3) \frac{\begin{vmatrix} 1 & (k+1)^2 \\ 1 & n^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & (k+1)^2 \\ 1 & (k+2)^2 \end{vmatrix}} = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - (k+1)^2) = \sum_{k=0}^{n-1} n^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(k+1)}_{k+1=\lambda}{}^2 =$$

$$= n^2 \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda^2 = n^2 \cdot n - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

~

! Για να εφαρμόσω υποβιβασμό τάξης χρειάζομαι οπωσδήποτε μια μερική λύση.

ΥΠΟΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΑΞΗΣ

Έστω ότι Y_n είναι μερική λύση.

Θέτουμε $y_n = Y_n \cdot U_n$ (*)

Αν κάνω τη διαδικασία αυτή προκύπτει μια νέα Ε.Δ κατά μιας τάξης <u>μικρότερη</u> από αυτή που είχα αρχικά.

$y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \rightsquigarrow$ 2ης τάξης

και με $y_n = Y_n U_n$ προκύπτει η

$$\left.\begin{array}{l} Y_{n+2} U_{n+2} + p_n Y_{n+1} U_{n+1} + q_n Y_n U_n = 0 \\ \text{Όμως: } p_n Y_{n+1} = -Y_{n+2} - q_n Y_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_{n+2} U_{n+2} - (Y_{n+2} + q_n Y_n) U_{n+1} + q_n Y_n U_n = 0$$

Οπότε $Y_{n+2} \Delta U_{n+1} = q_n Y_n \Delta U_n \rightsquigarrow$ 1ης τάξης ως προς ΔU_n. Y, q_n γνωστά.

Λύνεται άμεσα με γνωστό τύπο και με αντικατάσταση στην
(*) βρίσκω την y_n

Παράδειγμα

→ ομογενής $2^{ης}$ τάξης

Έστω η Ε.Δ $y_{n+2} - (n+2)y_{n+1} + (n+2)y_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$
και $Y_n = n$ είναι μερική λύση. Να επιλυθεί εφαρμόζοντας υποβιβασμό τάξης

Λύση// Θέτω $y_n = Y_n U_n = n \cdot U_n$

και καταλήγω στην $(n+2)\Delta U_{n+1} = (n+2)n\Delta U_n$

$\Rightarrow \Delta U_{n+1} = n \cdot \Delta U_n$

και εφαρμόζοντας γνωστό τύπο έχω $\Delta U_n = (n-1)!$

έχοντας πάρει $\Delta U_1 = 1$ → επιλέγω ώστε να βολεύει

$\Delta U_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1} j\right) \Delta U_1$ Βρίσκω άλλη μια μερική λύση με αυτή τη διαδικασία.

- Εάν οι δυο μερικές λύσεις που βρέθηκαν είναι Γ.Α. τότε θα αποτελούν Β.Σ.Λ. της αρχικής Ε.Δ. Πρέπει να επαληθεύσω ότι αυτές οι δυο είναι Γ.Α

Εαν δεν είναι Γ.Α. κάνω μια διαφορετική επιλογή των σταθερών

$\Delta U_n = (n-1)! \Rightarrow U_{n+1} - U_n = (n-1)!$ και επιλύω ξανά

και προκύπτει ότι $U_n = 1! + 2! + \ldots + (n-1)!$

Αντικαθιστώ στην $y_n = n \cdot U_n$ και βρίσκω την y_n

Έχω βρει μια 2η μερική λύση. Ελέγχω με ορίζουσα Casorati αν είναι Γ.Α. και αν είναι αποτελούν Β.Σ.Λ.

07/04/2016

$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \quad , n\in\mathbb{N}$

$0! = 1$

$\left.\begin{array}{l} e! \\ (-1)! \end{array}\right\}$ Δεν έχουν νόημα.

Συνάρτηση Γάμμα

$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$ (Η φυσική επέκταση του παραγοντικού από τους φυσικούς στους πραγματικούς)

→ είναι τουλάχιστον συνεχής

Τότε

$\Gamma(x+1) = x\cdot \Gamma(x) \qquad (n+1)! = n!(n+1)$

↳ Δεν έχω $x+1$ γιατί $\Gamma(n) = (n-1)!$

Ε.Δ. Ν-τάξης τύπου Euler

ομογενής

(*) $$\frac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)} y_n^{(N)} + p_{n-1}\frac{\Gamma(n+N-1)}{\Gamma(n)} y_n^{(N-1)} + \ldots + p_1 n\, y_n^{(1)} + p_0 y_n = 0$$

όπου $y_n^{(N)} = \Delta^N y_n$ και $\dfrac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)} = n(n+1)(n+2)\ldots(n+N-1)$

↳ εμπρόσθια διαφ. N-τάξης

με $\Gamma(n+N) = (n+N-1)!$

$\Gamma(n) = (n-1)!$

και τα $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ είναι σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Φαίνεται ότι έχει σαν μεταβλητή το $y_n^{(N)}$ αλλά πραγματικά έχει το $\Delta^N y_n$ δηλ. διαφορές. Ψάχνω το y_n.

Δεν έχω αρχικές συνθήκες, άρα θα προκύψουν αυθαίρετες σταθερές.

Έστω $y_n = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$, r ζητούμενο.

Ψάχνω το r, τ.ω. η $y_n = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$ να είναι λύση της (*)

Γνωρίζω ότι $y_n^{(N)} = \Delta^N y_n$, $y_n = \dfrac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)}$

Τότε

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_n &= \frac{\Gamma(n+r+1)}{\Gamma(n+1)} - \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)} \\ \Delta^2 y_n &= \dots \\ &\vdots \\ \Delta^N y_n &= r(r-1)\cdots(r-N+1)\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n+N)} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$\Rightarrow$ κάνω πράξεις και αντικαθιστώ στην εξίσωση και έχω

$$r(r-1)\cdots\underbrace{(r-N+1)}_{=r-(N-1)} + p_{n-1}\, r(r-1)\cdots(r-N-2) + \dots + p_1 r + p_0 = 0$$

↳ χαρακτηριστικό πολ/μο

↳ πολυώνυμο N-βαθμού ως προς r , και έχει N-ρίζες σε πλήθος. (γενικά μιγαδικές)

Έστω r_i, οι ρίζες του πολυωνύμου (χαρακτηριστικού) και προκύπτουν οι

$$y_n^{(i)} = \frac{\Gamma(n+r_i)}{\Gamma(n)} \quad , i=1,2,\dots,N. \quad \text{λύσεις της } (*)$$

(Για κάθε i έχω μια διαφορετική λύση)

↳ N-μερικές λύσεις της ομογενούς (*)

(δεν γνωρίζω εάν αποτελούν Β.Σ.Λ πρέπει να ελέγξω εάν είναι Γ.Α, παίρνω ορίζουσα Casorati η οποία θα είναι N-τάξης

· Εάν οι $y_n^{(i)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε αυτές αποτελούν ένα Β.Σ.Λ.

· Εάν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες τότε πολ/ζω με n, n^2 κλπ εκεί που έχω πολλαπλότητα ριζών.

(δηλ. $y_n^{(1)}, n\cdot y_n^{(2)}, n^2 y_n^{(3)} \dots$)

! Εμείς θα ασχοληθούμε μέχρι 2ης, 3ης τάξης.

! Όταν έχουμε πολλαπλότητες στα r εφαρμόζουμε υποβιβασμό τάξης.

Παράδειγμα

$$\frac{\Gamma(n+N-1)}{\Gamma(n)}$$

$$\frac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)} = n(n+1)\,\Delta^{(2)} y_n + n\,\Delta y_n - \frac{1}{4} y_n = 0 \qquad (2 = N)$$

(Υποψιάζομαι ΕΔ τύπου Euler επειδή έχω Δ)

2ης τάξης Ε.Δ.

$$\frac{\Gamma(n+N)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)}{(n-1)!} = n(n+1)$$

→ το υπολογίζω καθώς στη γενική μορφή αυτό υπάρχει μπροστά από το $\Delta^N y_n$

και επίσης

$$\frac{\Gamma(n+N-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n+2-1)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$\frac{\Gamma(n+N-2)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = 1.$$

(Αυτά τα υπολογίζω ΚΑΘΕ ΦΟΡΑ ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ)

Πρέπει $\frac{\Gamma(n+N-1)}{\Gamma(n)}\cdot p_1 = n \Rightarrow n\cdot p_1 = n \Rightarrow p_1 = 1.$

και $\frac{\Gamma(n+N-2)}{\Gamma(n)}\cdot p_0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1\cdot p_0 = -\frac{1}{4} \Rightarrow p_0 = -\frac{1}{4}$

Άρα $p_1 = 1$, $p_0 = -1/4$

Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το:

$$r(r-1) + r - 1/4 = 0 \longrightarrow \underbrace{r_1 = 1/2 \quad \text{ΚΑΙ} \quad r_2 = -1/2}$$

Αφού είναι διακεκριμένες είμαι σίγουρη ότι είναι Γ.Α άρα οι $y_n^{(1)}, y_n^{(2)}$ αποτελούν Β.Σ.Λ

Άρα θα έχω:

$$y_n^{(1)} = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n)}$$

$$y_n^{(2)} = \frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}$$

Άρα $y_n = c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)}$ γενική λύση.

! Στις μη-γραμμικές Ε.Δ δεν μπορώ να μιλήσω για χαρακτηριστικό πολυώνυμο

ΜΗ-ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Ε.Δ

A) $y_{n+1} = \dfrac{ay_n+b}{cy_n+d}$, όπου a, b, c, d αριθμοί με $c \neq 0$ και $ad-bc \neq 0$

Εάν $c=0$ τότε η ΕΔ θα ήταν γραμμική.

Θεωρώ $\lambda = \dfrac{a\lambda+b}{c\lambda+d}$ χαρακτηριστική εξίσωση.

↳ όπου έχω y βάζω λ.

$\Leftrightarrow c\lambda^2-(a-d)\lambda-b=0$ → 2ου βαθμού πολ/μο.

Τότε παίρνω περιπτώσεις:

i) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\frac{y_{n+1}-\lambda_1}{y_{n+1}-\lambda_2} = \frac{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_1+b}{c\lambda_1+d}}{\frac{ay_n+b}{cy_n+d}-\frac{a\lambda_2+b}{c\lambda_2+d}} = \text{(ύστερα από πράξεις)}$$

$$= \overbrace{\left(\frac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d}\right)}^{\text{σταθερός αριθμός}} \frac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}$$

Θέτω $U_n = \dfrac{y_n-\lambda_1}{y_n-\lambda_2}$ ①

οπότε $U_{n+1} = \dfrac{c\lambda_2+d}{c\lambda_1+d} \cdot U_n$ → γραμμική Ε.Δ 1ης τάξης

βρίσκω το U_n και από την ① βρίσκω κατευθείαν την y_n

ii) λ_1 διπλή πραγματική.

Θα έχω $c\lambda_1^2 + a\lambda_1 + d\lambda_1 - b = 0$

↳ χαρακτηριστική εξίσωση

Τότε $\lambda_1 = \dfrac{d\lambda_1 - b}{a-c\lambda_1}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{a-d}{2c}$ και παίρνω:

$$\underbrace{\frac{1}{y_{n+1}-\lambda_1}}_{=U_{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{y_n-\lambda_1}}_{=U_n} + \frac{c}{a-c\lambda_1}$$

και θέτω $U_n = \dfrac{1}{y_n-\lambda_1}$ και τότε: $U_{n+1} = U_n + \dfrac{c}{a-c\lambda_1}$ ← γραμμική α' τάξης μη-ομογενής

Βρίσκω το U_n και αντικαθιστώντας στην $U_n = \dfrac{1}{y_n-\lambda_1}$ βρίσκω την y_n.

iii) λ_1, λ_2 συζυγείς μιγαδικές

(όμοια με την πρώτη → δεν θα επεκταθούμε)

14/04/2016

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Ε.Δ

Β) $y_{n+1} = \dfrac{a(n)\, y_n}{b(n) + c(n)\, y_n}$, $a(n), b(n), c(n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών

και $b(n) + c(n) y_n \neq 0 \ \forall n$.

Τότε θέτω $y_n = \dfrac{1}{U_n}$ και τότε θα έχω: (μετά από πράξεις) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{a(n)}{b(n) U_n + c(n)} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{b(n)}{a(n)} U_n + \frac{c(n)}{a(n)}$$

Ε.Δ. $1^{ης}$ τάξης γραμμική

(Βρίσκω με γνωστό τύπο το U_n και άρα το y_n)

Γ) $y_{n+1} = a(n) + \dfrac{b(n)}{y_n}$, $y_n \neq 0 \ \forall n$

ΓΕΝΙΚΑ σημαίνει ότι $\exists n_0 : y_{n_0} \neq 0$

κάθε όρος της $\neq 0$.

Τότε θέτω $y_n = \dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ και ύστερα από πράξεις

έχω $V_{n+2} - a(n) V_{n+1} - b(n) V_n = 0$ → γραμμική $2^{ης}$ τάξης ομογενής.

! Εάν είναι μη-γραμμική τότε δεν υπάρχει ένας γενικός τρόπος λύσης. Σε κάθε μορφή λειτουργώ διαφορετικά.

Δ) $y_{n+r}^{\lambda_r(n)}\, y_{n+r-1}^{\lambda_{r-1}(n)} \cdots y_{n+1}^{\lambda_1(n)}\, y_n^{\lambda_0(n)} = a(n)$, $y_n > 0 \ \forall n$.

ακολουθία

Λογάριθμος γινομένου = Άθροισμα λογαρίθμων

Τότε: Λογαριθμίζω και έχω:

$$\lambda_r(n) \ln y_{n+r} + \lambda_{r-1} \ln y_{n+r-1} + \dots + \lambda_0(n) \ln y_n = \ln(a(n))$$

Θέτω $W_n = \ln y_n$ και καταλήγω σε γραμμική.

Παράδειγμα

$y_{n+1} = \dfrac{2}{3-y_n}$. Να επιλυθεί η Ε.Δ και να μελετηθεί η συμπεριφορά της λύσης (να βρεθεί το όριο της y_n)

Λύση// Είναι της μορφής $y_{n+1} = \dfrac{a y_n + b}{c y_n + d}$ (A) μορφή)

με $b=2,\ a=0,\ c=-1,\ d=3$

(Εάν πάρω την Β μορφή $y_{n+1} = \dfrac{a(n) y_n}{b(n) + c(n) = y_n}$ δεν μπορώ να βάλω $a(n) = 1/y_n$ $\quad b(n) = 3/2,\ c(n) = -1/2$

Άρα δεν μπορώ να πάρω τη Β μορφή καθώς το $a(n)$ δεν μπορεί να έχει μέσα το y_n.

Ομοίως δεν μπορώ να πάρω την Γ μορφή)

Τότε αφού είναι της μορφής $y_{n+1} = \dfrac{a y_n + b}{c y_n + d}$ και τότε $\lambda = \dfrac{2}{3-\lambda}$ χαρ. εξίσωση

Δηλαδή $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$.

και τότε $\dfrac{y_{n+1}-1}{y_{n+1}-2} = \dfrac{\frac{2}{3-y_n} - 1}{\frac{2}{3-y_n} - 2} = \dfrac{y_n - 1}{2y_n - 4} = \dfrac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\dfrac{y_n-1}{y_n-2}\right)}_{U_n}$

και θέτω $U_n = \dfrac{y_n - 1}{y_n - 2}$ και άρα έχω την

$U_{n+1} = \dfrac{1}{2} U_n \rightarrow$ γραμμική $1^{ης}$ τάξης ως προς U_n ομογενής.

$\rightarrow$ της μορφής $y_{n+1} = p(n) y_n + q(n)$

$\prod_{j=0}^{n-1} p(j) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Άρα $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0$ $\rightarrow$ είναι μια σταθερά αυθαίρετη

και τότε αφού $U_n = \dfrac{y_n - 1}{y_n - 2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0 = \dfrac{y_n - 1}{y_n - 2}$

$\rightarrow$ δεν είναι εξίσωση διαφορών. βρίσκω αμέσως την y_n

$\Rightarrow y_n = \dfrac{2(1/2)^n U_0 - 1}{(1/2)^n U_0 - 1}$

και άρα

$\lim y_n = \lim \dfrac{2\overbrace{(1/2)^n}^{\to 0} U_0 - 1}{\underbrace{(1/2)^n}_{\to 0} U_0 - 1} = 1$ (γιατί $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$)

Παράδειγμα

$$y_{n+1} = \frac{3y_n - 1}{y_n + 1}$$

Να μελετηθεί η ακολουθία που ορίζεται από αυτή την αναδρομική σχέση. → όριο + μονοτονία λύσης

Λύση// Είναι της Α μορφής $y_{n+1} = \frac{ay_n + b}{cy_n + d}$

με $a=3$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$

Τότε $\lambda = \frac{3\lambda - 1}{\lambda + 1} \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 3\lambda + 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ διπλή

Άρα $\frac{1}{y_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{3y_n - 1}{y_n + 1} - 1} = \frac{1}{y_n - 1} - \frac{1}{2}$

Θέτω $\frac{1}{y_n - 1} = U_n$ και έχω $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{2}$ → γραμμική μη-ομογενής 1ης τάξης

και $U_n = \frac{2-n}{2}$

και $\frac{1}{y_n - 1} = \frac{2-n}{2} \Rightarrow y_n = 1 + \frac{2}{2-n}$

$$\lim y_n = \lim\left(1 + \frac{2}{2-n}\right) = 1$$

21/04/2016

Παράδειγμα

Να επιλυθεί η Ε.Δ. $y_{n+1} = y_n^{-2}$, $y_0 > 0$ ⊛

Λύση Η ⊛ είναι μια μη-γραμμική Ε.Δ.

Η ⊛ γίνεται $y_{n+1} \cdot y_n^2 = 1$ (Δ μορφή)

Τότε $\ln y_{n+1} = -2 \ln y_n$

Θέτω $w_n = \ln y_n$ $\rightsquigarrow w_0 = \ln y_0$

$w_{n+1} = -2 w_n$ άρα $w_n = (-2^n) w_0$

Άρα $\ln y_n = (-2^n) w_0 \Rightarrow \underline{\ln y_n = (-2^n) \ln y_0}$

$\Rightarrow e^{\ln y_n} = e^{\ln y_0 (-2^n)}$

Άρα $y_n = y_0^{(-2^n)}$

Παράδειγμα

Να επιλυθεί η $y_{n+1} = 2 y_n (1 - y_n)$ ①, με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y_n = \frac{1}{2}(1 - u_n)$

Λύση Τότε

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - u_{n+1})$$

Άρα από ①:

$$\frac{1}{2}(1 - u_{n+1}) = 2 \cdot \frac{1}{2}(1 - u_n)\left(1 - \frac{1}{2}(1 - u_n)\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_{n+1} \cdot u_n^2 = 1$ η οποία είναι μια μη-γραμμική Ε.Δ (ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα)

Παράδειγμα

Έστω $y(x+2) + a_1 y(x+1) + a_2 y(x) = 0$, a_1, a_2 σταθερές και $x \in \mathbb{R}$.

↳ Ονομάζεται συναρτησιακή εξίσωση!

Η συγκεκριμένη είναι $2^{ης}$ τάξης, γραμμική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

$b_1, b_2, b_3 \ldots \rightsquigarrow$ ακολουθία. Μπορούμε να έχουμε $b_{\frac{1}{2}+0}, b_{\frac{1}{2}+1}, \ldots$ αρκεί οι δείκτες να αποτελούν σύνολο ισοδύναμο με το $\mathbb{N}$ και να υπάρχει διάταξη σε αυτό!

↳ ∃ απεικόνιση "1-1" και επί που να πηγαίνει από το ένα στο άλλο

Ψάχνω να βρω λύσεις της μορφής $y=\lambda^x$

$y=\lambda^x$, $\lambda\neq 0 \rightsquigarrow$ το 0 προφανής λύση

Άρα πρέπει να ισχύει:

$\lambda^{x+2}+a_1\lambda^{x+1}+a_2\lambda^x=0$

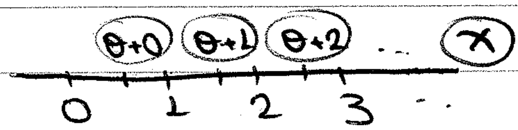
$\Rightarrow \lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ χαρακτηριστική εξίσωση

Τέτοιας μορφής λύσεις θα υπάρχουν αν-ν υπάρχουν λ που να ικανοποιούν την χαρακτηριστική εξίσωση

A) για $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ λύσεις λ_1^x, λ_2^x οι οποίες θα είναι γραμ. ανεξάρτητες άρα έχω βρει Β.Σ.Λ

! Η γενική λύση θα είναι $y(x)=c_1(\theta)\lambda_1^x+c_2(\theta)\lambda_2^x$

$x=n+\theta$, $n=0,1,2,\ldots$ και $0\leq\theta\leq 1$



→ Τα θ+0, θ+1.. είναι τα x που έχω. Δεν αναγκάζω το x να "πέσει" πάνω στους φυσικούς.

Παράδειγμα

$y_1^\mu=\sin(2\pi x)$

$y(x+2)-7y(x+1)+10y(x)=4\sin(2\pi x)$ ⊛

α) Να αποδειχθεί ότι η y_1^μ είναι μερική λύση της συναρτησιακής εξίσωσης ⊛

Λύση// Η y_1^μ πρέπει να την επαληθεύει άρα:

$\sin(2\pi(x+2))-7\sin(2\pi(x+1))+10\sin(2\pi x)=4\sin(2\pi x)$

$\Rightarrow \sin(4\pi+2\pi x)-7\sin(2\pi+2\pi x)+10\sin(2\pi x)=4\sin(2\pi x)$

$\Rightarrow \sin(2\pi x)-7\sin(2\pi x)+10\sin(2\pi x)=4\sin(2\pi x)$

$\Rightarrow 0=0$ ισχύει άρα y_1^μ μερική λύση της ⊛

β) Να επιλυθεί η ⊛ αν $y(0)=\sin(2\pi\theta)$

$y(1)=\cos(2\pi\theta)$, $\theta\in[0,1]$

Λύση// Η χαρ. εξίσωση: $\lambda^2-7\lambda+10=0 \rightsquigarrow \lambda_1=2$

$\rightsquigarrow \lambda_2=5$

Τότε η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y(x)=c_1(\theta)2^x+c_2(\theta)5^x$.

Και άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι η:

$$y(x) = c_1(\theta)\cdot 2^x + c_2(\theta) 5^x + \sin(2\pi x)$$

Πρέπει να προσδιορίσω τα $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$ που είναι συναρτήσεις και όχι σταθερές.

$$\begin{cases} \sin(2\pi\theta) = y(0) = c_1(\theta)\cdot 2^0 + c_2(\theta)\cdot 5^0 + \sin(2\pi\cdot 0) \\ \cos(2\pi\theta) = y(1) = c_1(\theta)\cdot 2^1 + c_2(\theta)\cdot 5^1 + \sin(2\pi\cdot 1) \end{cases}$$

Έχω δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους (τα $c_1(\theta)$, $c_2(\theta)$) και ποτέ δεν αντικαθιστώ το θ. Το αφήνω όπως είναι και βρίσκω $c_1(\theta) = \ldots$, $c_2(\theta) = \ldots$

Παράδειγμα

$$y(n+1) = a(n)\, y(n) + g(n)$$

$$y(n_0) = y_0 \quad , \; n \geq n_0 \geq 0$$

Τότε γνωρίζουμε ότι:

$$y(n) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right) y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right) g(r)$$

! 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

SOS Τα 1), 2) 5) και 7)!!

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} \dfrac{a^n - 1}{a - 1} & , a \neq 1 \\ n & , a = 1 \end{cases}$

Μπορώ να αλλάξω το πάνω μέρος του αθροίσματος αρκεί να αλλάξω και τον αντίστοιχο τύπο. Για το κάτω μέρος δεν μπορώ να το κάνω.

6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \begin{cases} \dfrac{a^n - 1}{a - 1} & , a \neq 1 \\ n & , a = 1 \end{cases}$

7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a^k = \frac{(a-1)(n+1)a^{n+1} - a^{n+2} + a}{(a-1)^2} \quad , a \neq 1$

Σπίτι 1) Να επιλυθεί το Π.Α.Τ $y_{n+1} = (n+1)y_n + 2^n((n+1)!)$

$y(1) = 1$, $n \geq 1$

2) Να επιλυθεί η $x(n+1) = 2x(n) + 3^n$. $x(1) = \frac{3}{2}$

<u>Παράδειγμα</u>

Ένα φάρμακο χορηγείται σε έναν ασθενή μία φορά κάθε 4 ώρες. Με $D(n)$ συμβολίζουμε την ποσότητα του φαρμάκου που βρίσκεται μέσα στο σώμα του ασθενούς κατά τη ν-οστή φορά που αυτό του χορηγείται. Το σώμα διασπά ένα ποσοστό p του φαρμάκου κάθε φορά που χορηγείται στον ασθενή το φάρμακο. Εάν η δόση που χορηγείται στον ασθενή είναι σταθερή και ίση με D_0 να βρεθεί τύπος για το $D(n)$ καθώς και το όριο του $D(n)$ για $n \to \infty$

υπήρχε στον οργανισμό μετά το τέλος της ν-οστής φοράς

Λύση $D(n+1) = (1-p)\,D(n) + D_0 \rightarrow$ σταθερή δόση D_0, $n \geq 0$

Είναι μια γραμμική Ε.Δ. 1ης τάξης μη-ομογενής.

Τότε $$D(n) = \left(\prod_{j=0}^{n-1}(1-p)\right) D_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}(1-p)\right) D_0$$

- $$\prod_{j=0}^{n-1}(1-p) = (1-p)^n$$

- $$\prod_{j=k+1}^{n-1}(1-p) = (1-p)^{n-k-1}$$

και $$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\prod_{j=k+1}^{n-1}(1-p)\right) D_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^{n-k-1} D_0 =$$

$$= D_0 \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^{n-1} \cdot (1-p)^{-k} = D_0 \cdot (1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1-p)^k}$$

Άρα $$D(n) = (1-p)^n \cdot D_0 + D_0 \frac{(1+(1-p)^n)}{p}$$

Τότε $$\lim D(n) = \lim\left((1-p)^n D_0 + D_0 \frac{(1+(1-p)^n)}{p}\right) = \frac{D_0}{p}$$

12/05/2016

Παράδειγμα (Χρεολυσία)

Έστω $p(n)$: το κεφάλαιο το οποίο απομένει προς αποπληρωμή μετά την n-οστή δόση την οποία συμβολίζουμε με $g(n)$.

$p(n+1) = p(n) + r\,p(n) - g(n)$, r = επιτόκιο (ποσοστό) δηλ. $r \in (0,1)$

Άρα $p(n+1) = (1+r)\,p(n) - g(n)$ και $p(0) = p_0$

Επίσης $g(n) = T$, σταθερή ακολουθία

Άρα $p(n+1) = (1+r)\,p(n) - T$, δηλαδή έχω μια Ε.Δ γραμμική 1ης τάξης , μη ομογενής και από γνωστό τύπο έχω $p(n) = (1-r)^n p_0 - ((1+r)^n - 1)\frac{T}{r}$

Θα πρέπει $p(\tilde{n}) = 0$, $\tilde{n}$ - ο τελευταίος μήνας, όπου πρέπει το δάνειο να έχει εξοφληθεί

Και λύνουμε ως προς T.

$p(\tilde{n}) = 0 \Rightarrow (1+r)^{\tilde{n}} p_0 - ((1+r)^{\tilde{n}} - 1)\frac{T}{r} = 0$

και βρίσκω το T, δηλ. το ποσό της δόσης που πρέπει να δίνεται στη τράπεζα κάθε μήνα.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σημείο $x^* \in D(f)$ καλείται σημείο ισορροπίας (equilibrium point) εάν το x^* είναι σταθερό σημείο της f. Δηλαδή $f(x^*) = x^*$

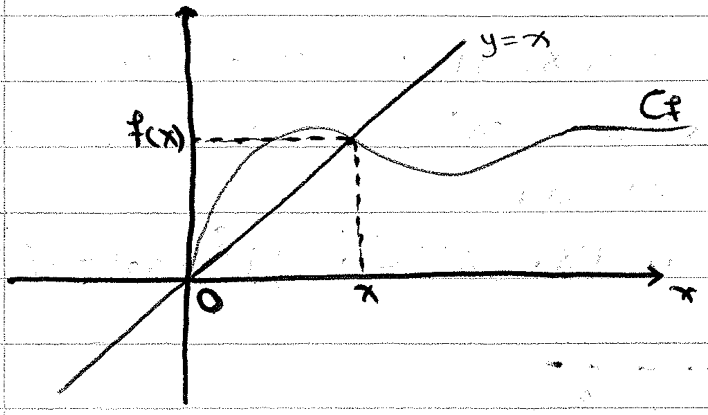
→ Έστω $x(n+1) = f(x(n))$ και έστω έχω μια f που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση και x^* ένα σταθερό σημείο (ισορροπίας) αυτής. Επίσης $x(0) = x^*$

Τότε:

$x^* = f(x^*) = f(x(0)) = x(1)$

$x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$

Δηλ. $x(1), x(2) = x^*$ και ομοίως καταλήγω και έχω $x(n) = x^* \rightsquigarrow$ σταθερή ακολουθία

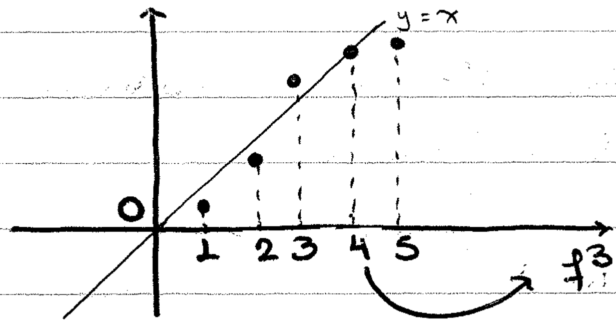


f : μια τυχαία συνάρτηση

πχ

$f(x) = x^3$. Βρείτε τα σταθερά σημεία της. (ισορροπίας)

$f(x) = x \Rightarrow x^3 = x \Rightarrow x = 0$ ή $x = \pm 1$



Το x_4 είναι σημείο ισορροπίας

$x(n+1) = f(x(n))$

$f^3(1) \rightarrow$ έχω εφαρμόσει την f 3 φορές για να φτάσω στο x_4

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x \in D(f)$. Αν υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ και x^* σημείο ισορροπίας τ.ω. $f^r(x) = x^*$ και $f^{r-1}(x) \neq x^*$ τότε το x καλείται τελικά σημείο ισορροπίας ($f^r = f \circ f \circ \dots \circ f \sim r$-φορές)

Παράδειγμα

$x(n+1) = T(x(n))$

με $T(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \le x \le 1/2 \\ 2(1-x) & , 1/2 < x \le 1 \end{cases}$ → Πρέπει οι τιμές που θα βρω να ανήκουν στα αντίστοιχα διαστήματα

$T(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x \\ 2(1-x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x = 0 & , 0 \le x \le 1/2 \text{ δεκτή} \\ x = 2/3 & , 1/2 < x \le 1/2 \text{ δεκτή.} \end{array}$

$x(0) = 1/4$

Τότε: $x(1) = 1/2$ $\quad (x(1) = x(0+1) = T(x(0)) = 2 \cdot 1/4 = 1/2)$

$x(2) = 1$

$x(3) = 0 \rightarrow$ είναι σημείο ισορροπίας

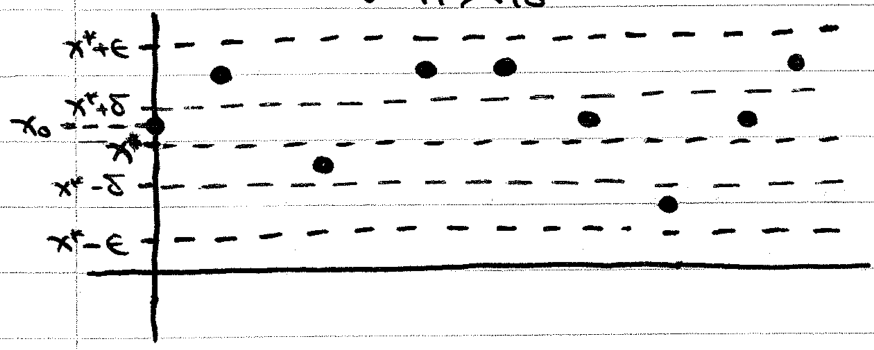
Το $x(0)$ δεν είναι σημείο ισορροπίας. Είναι όμως τελικά σημείο ισορροπίας καθώς σε μια επανάληψή του προέκυψε ένα σημείο ισορροπίας ($x(3)$)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x(n+1)=f(x(n))$ $(*)$, $x(0)=x_0$

1) Το σημείο ισορροπίας x^* της $(*)$ καλείται ευσταθές (stable) αν:

$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0)$ τ.ω $|x_0-x^*|<\delta \Rightarrow |f^n(x_0)-x^*|<\epsilon$

$\forall n \geq n_0$



2) Το σημείο ισορροπίας x^* της $(*)$ καλείται ασταθές, εάν δεν είναι ευσταθές. (ισχύει η άρνηση του πάνω ορισμού)

! $\sum_{k=1}^{n-1} a^k = \begin{cases} \dfrac{a^n-a}{a-1}, & a\neq 1 \\ n-1, & a=1 \end{cases}$ → Σωστός τύπος. Στις 21/04/2016 ο αντίστοιχος είναι λάθος!

19/05/2016

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $x(n+1)=f(x(n))$, $x(0)=x_0$.

1) Ένα σημείο ισορροπίας x^* καλείται ευσταθές αν $(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0) : |x_0-x^*|<\delta \Rightarrow |f^n(x_0)-x^*|<\epsilon$ για όλα τα $n>0$.

2) Ένα σημείο ισορροπίας x^* καλείται πόλος αν $\exists \eta>0$ τ.ω. $|x(0)-x^*|<\eta \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x(n)=x^*$

↳ η πραγματικός αριθμός

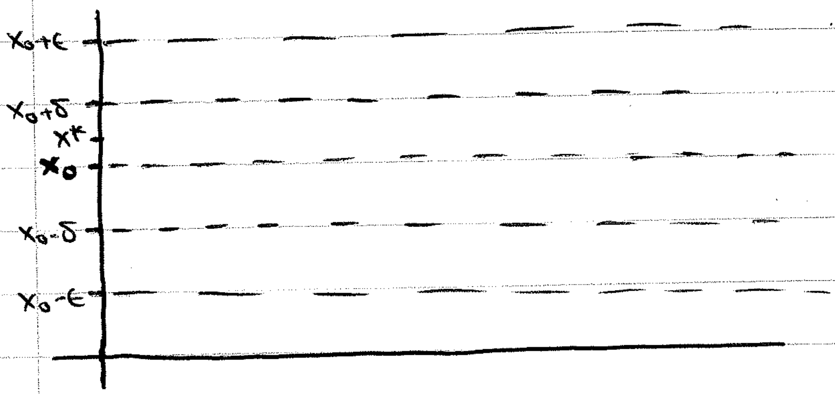
↳ εάν αντί για η βάλω το $+\infty$ δεν αλλάζει κάτι.

θέλω να ισχύει και για τα μικρά και για τα μεγάλα η

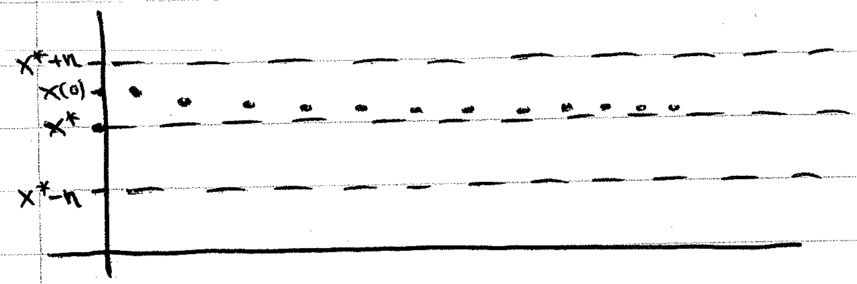
Αν $\eta=+\infty$ και ισχύει η σχέση $\lim x(n)=x^*$ τότε το x^* καλείται καθολικός πόλος (και για απόσταση $<\eta$ και $>\eta$)

3) Το σημείο ισορροπίας x^* καλείται ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας εάν είναι ευσταθές και πόλος ταυτόχρονα.

Αν το $\eta=+\infty$ τότε το x^* καλείται καθολικά ασυμπτωτικά ευσταθές (δηλ. καθολικός πόλος + ευσταθής)



Ευσταθές σημείο ισορροπίας. $x^* \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$



Ασυμπτωτικά ευσταθές. Οι όροι πρέπει να βρίσκονται μέσα στη λωρίδα και μάλιστα να συγκλίνουν στο x^*

Εάν το $x(0)$ δεν είναι μέσα στη λωρίδα, δεν απαιτώ οι όροι της ακολουθίας να συγκλίνουν στο x^*.

! Η ασυμπτωτική ευστάθεια είναι ισχυρότερη από την ευστάθεια (απλή)

Παράδειγμα (Λογιστική εξίσωση)

Έστω $y(n)$: το μέγεθος του πληθυσμού τη χρονική στιγμή n. (στη n-οστή μέτρηση). και έστω μ: ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού από τη μια γενιά στην άλλη. Θεωρούμε $\mu > 0$

Τότε $y(n+1) = \mu y(n)$, $\mu > 0$, $y(0) = y_0$

και άρα $y(n) = \mu^n y_0$, $\mu > 0$.

Εαν $\mu > 1 \rightsquigarrow$ τότε ο πληθυσμός αυξάνεται συνεχώς

Εαν $\mu < 1 \rightsquigarrow$ τότε ο πληθυσμός συνεχώς μειώνεται

Εαν $\mu = 1 \rightsquigarrow$ τότε ο πληθυσμός είναι σταθερός.

Ένα πιο ορθό μοντέλο είναι το

$y(n+1) = \mu y(n) - b y^2(n)$. $\rightsquigarrow$ το $b y^2(n)$ προκύπτει από μετρήσεις / δοκιμές.

μη-γραμμική Ε.Δ.

Θέτω $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$ και έχω:

$$x(n+1) = \underbrace{\mu x(n)(1 - x(n))}_{= f(x(n))} \Rightarrow x(n+1) = f(x(n))$$

Η επίλυσή της δεν είναι εφικτή.

Σημεία ισορροπίας: $x^* = f(x^*)$, $f(x) = \mu x(1-x)$.

Τότε $x^* = f(x^*) = \mu x^*(1 - x^*)$

$\Rightarrow x^* = \mu x^*(1 - x^*)$

$x^* = 0$, $x^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$ σημεία ισορροπίας.

είναι ασταθές

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν $\mu = 2{,}5$

$\mu = 2{,}5$, $x(0) = \frac{1}{10}$

Παράδειγμα (Cobweb - εφαρμογή στα οικονομικά - προσδιορισμός τιμής ενός προϊόντος).

Έστω $S(n)$ ο αριθμός των προϊόντων τα οποία βγαίνουν στην αγορά και έστω $D(n)$ ο αριθμός των προϊόντων που πωλούνται, και $p(n)$ η τιμή στην οποία πωλείται το κάθε ένα προϊόν.

Τότε $D(n) = -m_d\, p(n) + b_d$, $m_d > 0$, $b_d > 0$ είναι η σχέση μεταξύ της ζήτησης και της τιμής, m_d, b_d γνωστά.
Η ζήτηση εξαρτάται γραμμικά από την τιμή.
Αντίστοιχα,

$$S(n+1) = m_s\, p(n) + b_s \quad , m_s > 0 \; , b_s > 0.$$

Σχέση της προώθησης στην αγορά και της τιμής.

$\boxed{D(n+1) = S(n+1)}$ (δηλαδή όσα προϊόντα παράγονται τόσα να παράγονται)

$$p(n+1) = \underbrace{A\,p(n) + B}_{= f(p(n))} \quad \text{όπου } A = -\frac{m_s}{m_d}, \quad B = \frac{b_d - b_s}{m_s}$$

Για να βρω σημεία ισορροπίας: $x^* = f(x^*)$

$$\Rightarrow x^* = A x^* + B \Rightarrow x^* = \frac{B}{1-A} \quad \text{σημ. ισορροπίας.}$$

Για να δω τι είδους σημείο ισορροπίας είναι το x^* παίρνω περιπτώσεις για τα A, B.

26/05/2016

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER

Έστω $\overset{\text{Δ.Ε.}}{x'(t) = g(t, x(t))}$ ① με $x(t_0) = x_0$ για $t \in [t_0, b]$

Παίρνουμε το $[t_0, b]$ και το χωρίζουμε

Χωρίζω το $[t_0, b]$ σε N ίσα υποδιαστήματα

$h = \dfrac{b - t_0}{N}$, το μήκος ενός υποδιαστήματος, t_n, $n = 0, 1, \ldots N$

$t_1 = t_0 + 1 \cdot h$ Τα $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... ονομάζονται σημεία της διαμέρισης

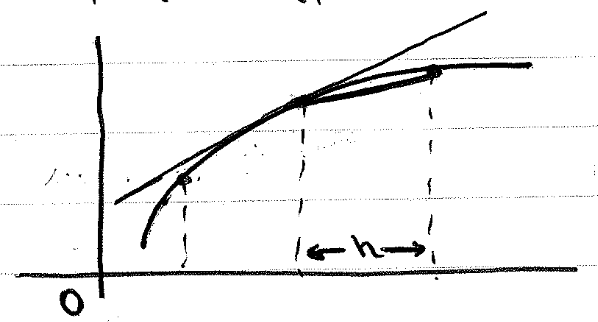
$t_2 = t_0 + 2 \cdot h$

⋮ κ.ο.κ.

Μια προσέγγιση της x' θα είναι αυτό το κλάσμα (χωρίς το όριο) όπου $h = \dfrac{b - t_0}{N}$

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Γεωμετρική ερμηνεία



Για να βελτιώσω την προσέγγιση απλά μικραίνω το διάστημα, δηλ. το μήκος h

Άρα η ① γίνεται $x(t+h) = x(t) + h g(t, x(t))$

Θέτω $t_n = t_0 + n \cdot h$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$

και άρα έχω

$$x(t_0 + (n+1) \cdot h) = \underbrace{x(t_0 + nh)}_{= x(n)} + h g(t_0 + n \cdot h, x(t_0 + n \cdot h))$$

$$x(n+1) = x(n) + h g(n, x(n)) \quad , n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Αλγόριθμος Euler, ο οποίος προσεγγίζει τη διαφορική εξίσωση στα σημεία της διαμέρισης.

Παράδειγμα

Έστω η διαφορική εξίσωση $x'(t) = 0.7\,x^2(t) + 0.7$ με $x(0) = 1$ και $t \in [0,1]$. Να επιλυθεί.

Λύση// Στις Δ.Ε την γράφαμε ως $y' = 0.7\,y^2 + 0.7$

$$y' = 0.7\,y^2 + 0.7 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0.7\,y^2 + 0.7 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{μεταβλ.}]{\text{χωρισ.}} \frac{dy}{0.7(y^2+1)} = dx \Rightarrow \frac{10}{7}\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10}{7}\,\mathrm{Arctan}\,y = x + C$$

$$\Rightarrow \frac{10}{7}\,\mathrm{Arctan}\,1 = 0 + C$$

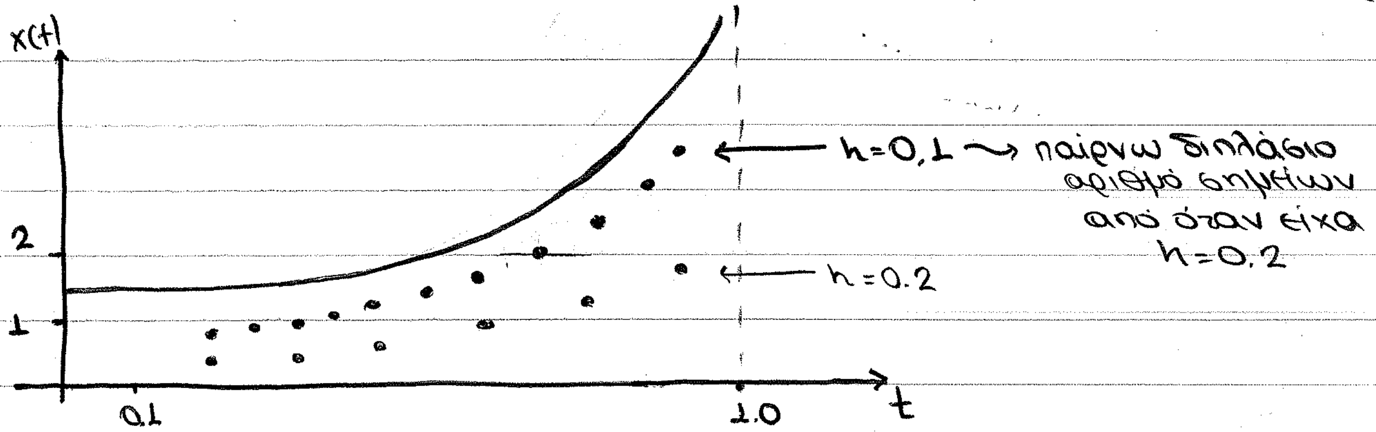
Όμως $y(0) = 1$. C: αυθ. σταθερά.

Άρα τελικά $x(t) = \tan\left(0.7\,t + \frac{\pi}{4}\right)$ → επιστρέφοντας στον αρχικό συμβολισμό

↳ Αναλυτική λύση

→ Εφαρμόζω τώρα τη μέθοδο του Euler. → προσεγγιστική λύση

$$x(n+1) = x(n) + 0.7\,h\,(x^2(n) + 1) \quad , x(0,1)$$



Παράδειγμα

$$x'(t) = a\,x(t)\,(1 - x(t)) \quad (1), \quad x_0 = x(0)$$

Λύση// Τα σημεία ισορροπίας της διαφορικής εξίσωσης προκύπτουν για $x'(t) = 0$

Έχω $g(x(t)) = a\,x(t)\,(1 - x(t))$

$$g(x^*) = 0 \Rightarrow a\,x^*(1 - x^*) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 \text{ και } x_2^* = 1$$

Αναλυτική λύση της (1)

$$\frac{dx}{dt} = a\,x(t)\,(1 - x(t)) \Rightarrow \frac{1}{a\,x(t)\,(1 - x(t))}\,dx = dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{1}{x(t)\,(1 - x(t))}\,dx = \int dt \Rightarrow$$

↳ εάν με μπερδεύει το t σκέφτομαι σαν να μην υπάρχει

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\int \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \int dt$$

- $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} \Longrightarrow A = B = 1.$

  Δηλ $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

Οποτε $\frac{1}{a}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \int dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln \frac{x}{1-x} = at + c \Rightarrow x(t) = \frac{b\cdot e^{at}}{1+be^{at}}, \quad b = e^{c}.$$

Απο αλγόριθμο Euler εχω:

$x(n+1) = x(n) + h a x(n)(1-x(n)) \quad , x(0) = x_0$

! Βάζω κάποιο h όσο γίνεται πιο μικρό, και υπολογίζω τις 5-10 πρώτες τιμές, δεν λύνω την Εξίσωση διαφορών

$$y(n) = \frac{ha}{1+ha}\cdot x(n)$$

$$y(n+1) = (1+ha)\,y(n)\,(1-y(n))$$

Τα σημεια ισορροπιας της Ε.Δ και της Δ.Ε. ταυτίζονται

Δηλ. η Διαφ. Εξίσωση και η Ε. Διαφορών που προκύπτει από τον αλγόριθμο του Euler έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία ισορροπιας.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Εστω x^* σημειο ισορροπιας της εξίσωσης διαφορων $x(n+1) = f(x(n))$, και η f έχει πρώτη παράγωγο f', με f' συνεχής. Τότε:

1) $|f'(x^*)| < 1$ τότε το σημείο ισορροπιας x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές

2) $|f'(x^*)| > 1$ τότε το σημείο ισορροπιας x^* είναι ασταθές.

3) $|f'(x^*)| = 1$ το θεώρημα δεν δίνει απάντηση.

! Εάν $|f'(x^*)| \neq 1$ τότε το x^* καλείται υπερβολικό σημείο ισορροπιας.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω x^* σημείο ισορροπίας της $x(n+1) = f(x(n))$ και $f'(x^*) = 1$. Τότε θα ισχύει ότι:

i) $f''(x^*) \neq 0 \Rightarrow$ το x^* είναι ασταθές

ii) $f''(x^*) = 0$ και $f'''(x^*) > 0 \Rightarrow$ το x^* ασταθές

iii) $f''(x^*) = 0$ και $f'''(x^*) < 0 \Rightarrow$ το x^* ασυμπτωτικά ευσταθές

! Συμβολίζω ως $Sf(x) = \dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$ και ονομάζεται παράγωγος του Schwartz.

→ Αν $f'(x^*) = -1$ τότε $Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \dfrac{3}{2}(f''(x^*))^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω x^* σημείο ισορροπίας της $x(n+1) = f(x(n))$ τέτοιο ώστε $f'(x^*) = -1$. Τότε:

i) Αν $Sf(x^*) < 0$ τότε x^* ασυμπτωτικά ευσταθές

ii) Αν $Sf(x^*) > 0$ τότε x^* ασταθές.

! Αυτό που κάνω δηλαδή είναι να βρω τα x^* και να υπολογίσω το $f(x^*)$, και αναλόγως πάω στο αντίστοιχο θεώρημα

Παράδειγμα

Έστω η εξίσωση διαφορών $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$. Να βρείτε τα σημεία ισορροπίας και να τα εξετάσετε ως προς την ευστάθεια.

Λύση// $f(x(n)) = x^2(n) + 3x(n)$.

Για να βρω τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης διαφορών

$f(x^*) = x^* \Rightarrow x_1^* = 0$, $x_2^* = -2$

$f'(0) = 3 \neq 1$ και $|f'(x^*)| = |f'(0)| = 3 > 1$

Άρα το $x^* = 0$ είναι ασταθές (1° θεώρημα)

$f'(-2) = -1$. Τότε $Sf(-2) = -12 < 0$.

Άρα $x^* = -2$ ασυμπτωτικά ευσταθές